Navier−Stokes 流体方程式の大局非決定性<カオス性の起源>

08/1/19~26

NS 方程式は天候予測,流体工学,物理等多種で筆頭重要性を担う。然るに其の解が局所的には決定性を有するが、大局的には不完全に成る**カオス性**が一つ難壁にあった。

然るに其の本質は決定論方程式解が確率過程の「有矛盾**実数０**の実現確率の**標本過程**」である事<局所可観測、かつ大局非可観測>、

同方程式に即せば右辺駆動力項一つである**粘性力項**＝$\mu\nabla^2 v$ が**拡散方程式**同様に**不可逆な情報喪失確率過程**になる事に由来する。同項には渦(乱流)起因力 curlcurlv も含まれる。

NS 方程式は dp/dt＝f の粒子軌道可観測性を前提にした古典力学に由来だから拡散性により軌道情報性が時間経過と共に消失する以上、長期予測困難不可避が了解されよう。

拡散性が無視できる大スケールでは古典移動運動論的だから長期予報可能性があろう。
非線形一般は多様現象を起因するが**完全決定論性**からカオス性には本来的には無関係。
層流間の粘性力起因の乱流的かき混ぜ(不可逆過程)はカオス性が一層増幅されるだろう。
筆者には本分野は素人なので詳細言及はできないが、関係者一同に遅ればせながら以上報告します。

［１］：Goedel 不完全性定理の確率統計現象性と汎統計学定理：

まずはGoedel 不完全性定理に関する教程を了解の上で以下に進んで頂きたい。
其の趣旨は以下に要約できます。
①その真相は一つは非決定性に起源する**情報喪失−確率化現象**という事である。
②その前に同不完全性定理が**自然数Ｎ**での非決定性＝**無限大**に起因する事、
③それが**実数０の非決定、決定の矛盾実現**と一対にある事、
④決定論にして局所確定、大局不確定の**カオス**は確率過程統計集団の決定論的存在である実現確率０の標本過程である事。

［２］：Navier-Stokes 方程式。

ＮＳ式の最も一般型系は以下の式、其の導出過程に関しては*本サイト＝温暖化メカニズム付録参照*。①以下は有粘性有圧縮性フル装備品。非線形項は加速度勘定で駆動力的意味がないはず。

－Navier.Stokes Equation－

① $D(\rho v)/Dt \equiv \rho[\partial_t v+(\Sigma_{k=1}^{3} v_k \partial_k)v]+[\partial_t \rho+(v\cdot\nabla)\rho]v=\mu\nabla^2 v-\mathrm{grad}P+\rho K.$

主役流体速度場 $v(t;x)$, 他に流体重量密度 $\rho(t;x)$、圧力 $P(t;x)$, 外部力 $K(t;x)$（重力等）, 従って ρ、Ｐの決定には流体連続式と状態方程式の２本も必要になる。

②**流体連続式**　　：$\partial_t \rho+\mathrm{div}(\rho v)=0.$

③**流体状態方程式**：$P=k\rho T.$ ←$PV=kmT.$

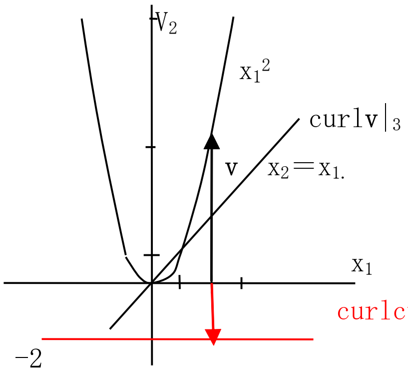
温度Ｔはどう決める？、もう一つ関係式が？、

［３］：Chaos 起源の不可逆的粘性(摩擦)項内容を見る：$\nabla^2 v=\mathrm{graddiv}v-\mathrm{curlcurl}v.$

⑴graddivv：

$\iiint dv\,\mathrm{div}v=\iint\langle dS\cdot v\rangle$ だから圧縮性流れ噴出し、吸い込み scalar 強度で、その grad は流体質点を駆動する力と解釈できる。entropy 増大的不可逆過程、

⑵**最も簡単な** curlcurlv＝**定数** vector **場になる流速場**：$v_2=x_1^2.$



$\mathrm{curl}v=(\partial_2 v_3-\partial_3 v_2,\ \partial_3 v_1-\partial_1 v_3,\ \partial_1 v_2-\partial_2 v_1)$

$=(0,\ 0,\ \partial_1 v_2=2x_1)$

$\mathrm{curl}v\ \mathrm{curl}v=(0,-\partial_1 v_3=-2,\ 0)$

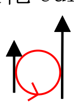
curlcurlv＝「流れ v がある時の一様な**粘性抵抗力**」

摩擦粘性は不可逆過程、

＊graddivv＝grad(0)＝(0,0,0)

⑶curl 演算は vector 場の微分傾斜 grad に相当、curlv＝定数だとすれば力は名流体局所点に同等の駆動力で流体加速度に寄与しない。隣接する vector 量の傾斜変化 curl は文字通りコロ転がし渦流的、この意味で乱流の粘性ランダム起源が伺える。

右の円は反時計方向に回転する摩擦駆動力が働く。



［４］：拡散方程式と軌道情報喪失性：

NS 式の密度 ρ が一様、右辺の圧力や外力がなく、しかも(vgrad)v＝０とできれば(1)成立、
scalar 場類推から一見流れ一様中の純分子熱ブラウン運動的な拡散過程に見える、

(1) $\partial_t v=\rho^{-1}\mu\nabla^2 v$。　〈形式は拡散方程式だが、中身は流体伸縮、渦かき混ぜ的！〉

之は奇妙だが速度場に関する拡散方程式、其の値は正規分布偏差値が時間経過と共に拡大、最後には０になる拡散過程。この方程式は速度場が時間経過と共に減少するというよりも、**何ら力学的運動記述でなく、実は逆に運動奇跡に「雑音」を乗せて曇らす働きをしてる。**

☞：拡散方程式は時間反転不可能、之は古典力学運動では不可能、波動でも不可能、
其の起源は**量子過程の不可逆性**に由来する。正確には時間発展する Scroedinger 方程式は可逆でない。エネルギ可観測な Hamiltonian＝$\hat{H}_0$ の下では量子系は定常が証明できる。
$\hat{H}_0$ の下の定常系では期待値としての古典力学方程式が成立〈Ehrenfest 定理〉.
時間発展する Hamiltonian＝$\hat{H}_S(t)$ は非自己共役(エネルギ非可観測)で非解析的、従って非因果時間発展＝**瞬時量子状態確率遷移**＝量子確率過程になる事が一般証明される。

$i\hbar\partial_t\Psi(t)=\hat{H}\Psi(t)$。　$\hat{H}=\hat{H}_0\cup\hat{H}_S(t)$＝時間軸上の交互ランダム実現の確率演算子。
$\partial_t\omega_j(t)=\hbar^{-1}\Sigma_k\triangle E(t)[T_{jk}-\delta_{jk}]\omega_k(t)$.　〈**量子過程 Master 方程式**、上記と数学的に同値〉

ある時刻に $\hat{H}_S(t)$ が単位時間中に発生する確率密度は $\Delta E(t)/\hbar$〈energy 揺動進展原理〉.
ΔE は時刻 t の状態 $|j\rangle$ 密度 $\omega_j(t)$ と状態 energy＝ε_j から決定する energy 偏差値。
標本過程 $\hat{H}_0$ 実現時間区間では其の**固有状態一意実現**が証明可〈Schroedinger 犬矛盾解消〉
かくて量子時間発展系は統計集団に関する **Markov 確率過程**になる事が証明され、それは
量子 master 方程式の存在となる. この方程式は不可逆である。(量子確率過程力学の本格論文は今後 Web 上程予定、現在定番がない[*本サイト参照＝日本&海外物理学界が隠蔽した物理学上の基礎事実リスト❶*]。

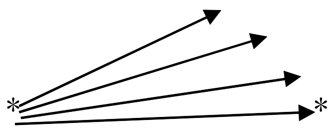
(2)**一次元正規分布**　：$f(x)=\exp[-(x-m)^2/2\sigma^2]/\sigma\sqrt{(2\pi)}$.
(3)**一次元濃度拡散分布**：$n(t;x)=n(0;0)\exp[-x^2/2(2\mu t)]/\sqrt{(2\pi)}\sqrt{(2\mu t)}$.

(4)「3 次元正規分布の拡散方程式解、規格化項の次数に注意」。
$\partial_t n(t;\mathbf{x})=\mu\nabla^2 n(t;\mathbf{x})$.　⇔　$n(t;\mathbf{x})=n(0;0)\exp[-x^2/2(2\mu t)]/(4\pi\mu t)^{3/2}$.
$\mathbf{x}^2\equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

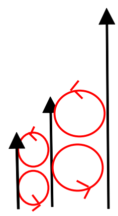
(5)時間経過最後に粒子位置情報は完全に喪失する。然るに時間関数としての偏差値,その増大速度が正規分布ならば判る。情報喪失はこの意味では拡散係数 σ。この様にカオス解の誤差精度と言う実用上必須の判断情報を得られるならばよいが。
$\sigma(t)=\sqrt{(2\mu t)}$.

⑹マクロ攪乱の非因果性！:

分子運動は本来的に第一原理としてのミクロな量子確率力学過程⑴だから情報喪失性が了解される［*本サイト参照＝日本＆海外物理学界が隠蔽した物理学上の基礎事実リスト❶*］問題はマクロでの混沌性、スプ-ンでのカップかき混ぜは**マクロ乱流体的運動**に成るが、時間のかかる分子拡散過程を経ずして極度に短時間で溶液一様性が実現する事だ。**乱流は統計理論**になると言う専門家の話を聞いた。それが超拡散式⑴なのだろう。流体に限らず赤青の小さいボールを暗案箱中で攪乱すれば其の空間配置は一様化する。マクロだから因果的古典運動にかかわらずだが?。多分流体同様にボール間に働く摩擦力があり、これは可逆力学力にはない。機械的攪拌器は産業で頻用されるが、ミクロ不可逆の摩擦粘性こそがランダム性起源になろう。より極端に言えばサイコロ、手もサイコロも運動はマクロ運動、結果は実質的にランダム、厳密ロボットハンド運動でサイコロ初期位置を固定し、投げ運動も完全プログラムで風のない真空中で、落下点は完全衝撃吸収だとサイコロ面は一つに決定できる！(古典力学軌道)。結局ミクロな非因果性を増幅する機構(乱流等)がある事になる？！・下図で4本矢印のマクロ速度ベクトル→があるが之に拡散粒子*がミクロランダムに乗れば時間をかけず拡散が成就する事になるだろうか?!(**噴出し**)。他一つは流体速度場傾斜による(**渦発生**)でのかき混ぜは不可逆性大であろう！。



″divgradv″



「左右の円が同じ強さ
だと相殺してしまう、
違うと渦発生へ」

″curlcurlv″

⑺ＮＳ方程式は古典的決定論駆動力と拡散的ランダム駆動力の(決定論＋確率論)の和：

万が一ＮＳ方程式解が解析的に $v(t;x)=V_D(t;x)+V_R(t;x)$ とかかれ、後者 V_R が問題の拡散項駆動力起因、前者が決定論駆動力起因と分離できるならば判りやすいのだが。(それが判ればもはや情報喪失でないのでカオスが消滅なのだが)。いずれにしても $\rho^{-1}\mu\nabla^2 v$ の**寄与が時間経過と共にどう精度に悪影響するかの定量基準**が出来るならば有難い事である。

⑻バタフライ効果は誤解！。

カオスに絡んで其の不安定性として北京で蝶が羽ばたくとロンドンで風が吹くと言う誇張話があるが、これは**長期予測カオス解の非決定＝大局不完全性**であって力学運動的不安定性と言う意味ではないと思われる。流体力学系の安定性は系の Lagrangean $\mathcal{L}=T-V$ が判れば判断できるかも知れない(取り急ぎここまで報告、誤解あらば教授下さい)。

補足事項 ：

①量子過程に関係しない純決定論アルゴリズムから生成されるカオス：

数学者には量子過程に無関係な「純決定論アルゴリズムから生成されるカオス」現象がある事を知るので量子過程だけに絡めての以上議論には疑義が起こるだろう。それに関する筆者回答一つは其のアルゴリズムが「何らかの確率過程母集団Ｒ」に所属してる確率標本過程 $s_j \in R$ に付随する確率変数値として生成される量Ｃ(s_j)はカオス化する。ここに s_j は定義上、決定論存在である・

然るに確率過程標本経路 s_j 実現確率値が 0 でない有限値にしても ″1″でなければ「完全決定性」はない事になる(離散値確率過程)。

大局に於いてやはり情報喪失が発生する。完全決定論でなければ、全ては大局に於いて不完全性(情報喪失性)が起きるの必然はただの論理。

カオスに係る議論で問題なのは **情報喪失（非決定論）と不安定発散性（決定論）** が混同されてるのではの懸念です。

②超難問提出ポアンカレ先生の純決定論力学系である３体問題の非決定性？：

$H = \frac{1}{2}(p_1^2/m_1 + p_2^2/m_2 + p_3^2/m_3) - \frac{1}{2}(\Sigma_{j \neq k = 1}^{3} G(m_j m_k / |x_j - x_k|)$.

なにしろ３角関係ですから不安定化必須は万人承知でしょう？！。
上記Ｈで引力項符号が＋になれば完全不安定発散系、然るに 2-3 引力はあたかも 1-2 間に擬似斥力が作用したかに効果です。当然ながら斥力は不安定化に若干貢献です。